

Линейность в комбинаторике

15 июля

1. Имеется 17 ящиков. В каждом лежит некоторое число монет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить в каждый из выбранных ящиков по монете. Докажите, что такими операциями можно уравнивать число монет в ящиках.
2. По кругу расставлены 256 целых чисел. Каждую минуту все числа одновременно заменяются на сумму своих соседей. Докажите, что вскоре все числа будут делиться на 256.
3. В каждой клетке таблицы 100×100 стоит либо $+$, либо $-$. За ход можно поменять знаки в одном столбце и в одной строке одновременно. Можно ли получить любое расположение знаков, если первоначально стоят только плюсы?
4. Дана таблица с n столбцами и $n+1$ строками, в которой отмечено несколько клеток. Докажите, что можно выбрать такое непустое множество строк, что в его пересечении с любым столбцом будет четное количество отмеченных клеток.
5. По окружности расставлены $p > 2$ целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2025} , если за ход из каждого числа вычитается его: **(а)** левый сосед; **(б)** k -ый сосед слева, k фиксировано; **(в)** k -ый сосед слева, k может меняться от хода к ходу
6. В клетчатой таблице **(а)** 4×4 ; **(б)** 6×6 идет игра "Жизнь" по следующим правилам: клетка живет, если на предыдущем ходу у нее было нечетное число живых соседей (по стороне) и умирает в противном случае. Докажите, что при любом начальном положении позиция со временем заикнется и найдите максимально возможную длину такого цикла.
7. В каждой граничной клетке таблицы 2025×2025 поставили по целому числу. Докажите, что можно заполнить все остальные клетки целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3 , содержащемся в таблице, была равна нулю.
8. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью. Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m . Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.